Integrales Trigonométricas (II)

Potencias Trigonométricas (II)

II.) Potencias de la Tangente y la Secante (Separadas)

2.1 Potencias de Tangente

Aquí te mostraré como resolver integrales de la forma

$$\int tan^n(x)dx$$

La idea es sacar un factor $tan^2(x)$ y convertirlo en secante, usando la fórmula (2).

Ejemplo 5: Evalúa $\int tan^4(x)dx$

Separo un factor $tan^2(x)$ junto con el dx.

$$\int tan^2(x)[tan^2(x)dx]$$

Utilizo la fórmula (2) para transformar el término $tan^2(x)$ (que separé junto con el dx) en $sec^2(x)$.

$$= \int tan^2(x)(sec^2(x) - 1)dx = \int tan^2(x)sec^2(x)dx - \int tan^2(x)dx$$

Para la primera integral utilizo la sustitución $u = tan(x) \rightarrow du = sec^2(x)dx$ (la integración te la dejaré a ti). Transformaré el término $tan^2(x)$ en la segunda integral a secante (es el mismo procedimiento).

$$= \frac{tan^3(x)}{3} - \int (sec^2(x) - 1)dx$$

Ya puedes resolver esta integral para llegar a la respuesta

$$\int tan^4(x)dx = \frac{tan^3(x)}{3} - tan(x) + x + C$$

Problema Práctico 3: Resuelve $\int tan^6(t)dt$

2.2 Potencias de Secante

Trataré con integrales de la forma

$$\int sec^n(x)dx$$

Para resolverlas, separaré un factor $sec^2(x)$ y haré una integración por partes. Para la integración por partes usaré la sustitución $dv = sec^2(x)dx \rightarrow v = tan(x)$, y la u será lo que quede.

Ejemplo 6: Evalúa $\int sec^4(x)dx$

Separo el factor $sec^2(x)$

$$\int sec^2(x)[sec^2(x)dx]$$

Aplico integración por partes. Diré $dv = sec^2(x)dx \rightarrow v = tan(x)$, recuerda que u será lo que quede por eso $u = sec^2(x) \rightarrow du = 2sec(x)sec(x)tan(x)dx = 2sec^2(x)tan(x)dx$. Usando la fórmula de integración por partes

$$= sec^2(x)tan(x) - \int tan(x)[2sec^2(x)tan(x)dx]$$

$$= sec^2(x)tan(x) - 2\int sec^2(x)tan^2(x)dx$$

Para la integral que quedó usa la sustitución $t = tan(x) \to dt = sec^2(x)dx$ y resuelve. La solución

$$\int sec^4(x)dx = sec^2(x)tan(x) - \frac{2}{3}tan^3(x) + C$$

<u>**Ejemplo 7**</u>: Evalúa $\displaystyle\int sec^6(y)dy$

Separo un factor $sec^2(x)dx$

$$\int sec^4(y)[sec^2(y)dy]$$

Uso integración por partes donde $dv = sec^2(y)dy \to v = tan(y)$ y $u = sec^4(y) \to$

$du = 4sec^3(y)sec(y)tan(y)dy = 4sec^4(y)tan(y)dy$. Usando la formula de integración por partes

$$= sec^4(y)tan(y) - \int tan(y)[4sec^4(y)tan(y)dy]$$
$$= sec^4(y)tan(y) - 4\int tan^2(y)sec^4(y)dy$$

Lo mas simple será transformar $tan^2(y) = sec^2(y) - 1$

$$= sec^4(y)tan(y) - 4\int (sec^2(y) - 1)sec^4(y)dy$$

$$= sec^4(y)tan(y) - 4\int (sec^6(y) - sec^4(y))dy$$

$$= sec^4(y)tan(y) - 4\int sec^6(y)dy + 4\int sec^4(y)dy$$

Mira que si $I = \int sec^6(y)dy$ entonces

$$I = sec^4(y)tan(y) - 4I + 4\int sec^4(y)dy$$

Despeja I

$$5I = sec^4(y)tan(y) + 4\int sec^4(y)dy$$

Por eso

$$\int sec^6(y)dy = \frac{1}{5}sec^4(y)tan(y) + \frac{4}{5}\int sec^4(y)dy$$

Usando el ejemplo 6 para resolver la última integral

$$\int sec^6(y)dy = \frac{1}{5}sec^4(y)tan(y) + \frac{4}{5}sec^2(y)tan(y) - \frac{8}{15}tan^3(y) + C$$